OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a VII-a

Soluţii

1. a) $\left(1>\frac{1}{\sqrt{2015}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{2015}},\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{2015}}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2015}}\geq\frac{1}{\sqrt{2015}}\right)\Rightarrow$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2015}}>\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2015}}+\frac{1}{\sqrt{2015}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2015}}}_{2015}\Leftrightarrow$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2015}}>\frac{2015}{\sqrt{2015}}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2015}}>\sqrt{2015}.$$

b) $x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\ldots+\frac{\sqrt{2015}-\sqrt{2014}}{\sqrt{2015\cdot 2014}}\Leftrightarrow$

$$x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\ldots+\frac{\sqrt{2015}}{\sqrt{2015\cdot 2014}}-\frac{\sqrt{2014}}{\sqrt{2015\cdot 2014}}\Leftrightarrow$$

$$x=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2014}}-\frac{1}{\sqrt{2015}}\Leftrightarrow x=1-\frac{1}{\sqrt{2015}}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2015}-1}{\sqrt{2015}}\Leftrightarrow$$

$$x\sqrt{2015}=\sqrt{2015}-1.$$

$$1936<2015<2025\Leftrightarrow\sqrt{1936}<\sqrt{2015}<\sqrt{2025}\Leftrightarrow 44<\sqrt{2015}<45\Big|_{-1}\Leftrightarrow 43<\sqrt{2015}-1<44\Rightarrow$$

$$\left[\sqrt{2015}-1\right]=43\Leftrightarrow\left[x\sqrt{2015}\right]=43.$$

2. a) $a^2+b^2=c^2\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=2c^2\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{2c^2}=c\sqrt{2}$. Presupunem că

$c\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\exists r\in\mathbb{Q}$ astfel încât $c\sqrt{2}=r\Leftrightarrow\underset{\notin\mathbb{Q}}{\sqrt{2}}=\underset{\in\mathbb{Q}}{\frac{r}{c}}$ Contradicţie!

Prin urmare, $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\notin\mathbb{Q}$.

b) Dacă $a\not\vdots 5, b\not\vdots 5$, atunci $a^2,b^2\in\{5k+1;5k+4/k\in\mathbb{N}\}$. Dacă a^2,b^2 au aceeaşi formă, *5k+1* sau *5k+4*, atunci a^2+b^2 ar fi egală cu *5q+2* sau *5q+3*, ceea ce contrazice egalitatea dintre a^2+b^2 şi un pătrat perfect (c^2). Dacă a^2,b^2 au forme diferite,

$a^2+b^2=5q\Rightarrow c^2=5q\Rightarrow c\vdots 5\Leftrightarrow c^2=25p^2\Leftrightarrow a^2+b^2=25p^2\Rightarrow$ Putem considera

$a^2=9p^2$ şi $b^2=16p^2$. Ţinând cont de faptul că $(a,b)=1$, obţinem p=1. Avem a=3, b=4 şi c=5. Urmează că $\sqrt{a^2b^2+c^2}=\sqrt{9\cdot16+25}=\sqrt{169}=13\in\mathbb{N}$.

3. **a)** ABCD paralelogram $\Rightarrow \left.\begin{cases} AB\|CD\Rightarrow MAB\equiv NCD \\ (AB)\equiv(CD) \\ (AM)\equiv(NC) \end{cases}\right\}^{LUL} \Rightarrow \triangle MAB\equiv\triangle NCD \Rightarrow$

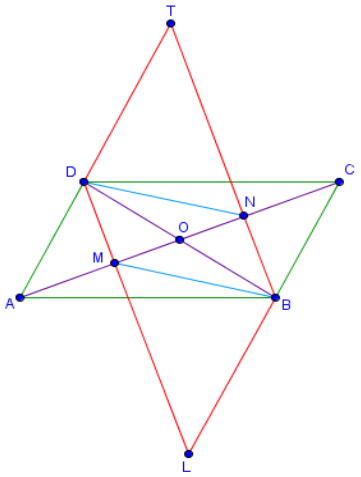
$(DN)\equiv(BM)$

b) Din ABCD paralelogram $\Rightarrow$

$\left.\begin{cases} AD\|CB\Rightarrow MAD\equiv NCB \\ (AD)\equiv(CB) \\ (AM)\equiv(NC) \end{cases}\right\}^{LUL} \Rightarrow \triangle MAD\equiv\triangle NCB$

$\Rightarrow (DM)\equiv(BN)$

$(DN)\equiv(BM)$ şi $(DM)\equiv(BN)\Rightarrow DMBN$ paralelogram $\Rightarrow$ $DL\|BT$, dar $DT\|BL\Rightarrow DLBT$ paralelogram. Cum O este mijlocul lui (DB) (din paralelogramul $ABCD$) $\Rightarrow$ O este mijlocul lui $(LT)\Rightarrow$ L, O, T sunt coliniare.



4. $\left.\begin{matrix} m(\sphericalangle A)=90^\circ \\ m(\sphericalangle C)=30^\circ \end{matrix}\right\}\Rightarrow m(\sphericalangle B)=60^\circ$

(BE-bisectoarea $\sphericalangle B\Rightarrow$ $m(\sphericalangle CBE)=m(\sphericalangle ABE)=30^\circ$.

$\triangle CEB$ este isoscel (având unghiurile din B şi C de 30°) $\Rightarrow$ $(BE)\equiv(CE)$. În $\triangle AEB$, $m(\sphericalangle EAB)=90^\circ, m(\sphericalangle ABE)=30^\circ\Rightarrow$

$AE=\frac{BE}{2}=\frac{CE}{2}\Rightarrow AC=3\cdot AE$. $\frac{AE}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{1}{3}\Rightarrow DE\|AB$.

Prin O, ducem $MN\|AB, M\in AC, N\in BC$. Conform TFA, avem

$\triangle EMO\sim\triangle EAB\Rightarrow \frac{EM}{EA}=\frac{MO}{AB}$ (1) şi din

$\triangle DNO\sim\triangle DBA\Rightarrow \frac{DN}{DB}=\frac{NO}{AB}$ (2).

Din $DE\|MN\|AB\Rightarrow \frac{EM}{EA}=\frac{DN}{DB}$ (3) Din rel. (1), (2) şi (3) $\Rightarrow (MO)\equiv(ON)$. În $\triangle CAB$, CF este mediană şi $MN\|AB\Rightarrow CF$ trece prin mijlocul lui (MN), adică prin O. Deci F, O, C sunt coliniare.

